



Matematická logika a *Regulae ad directionem ingenii*

Tomáš Holeček

1. Matematická logika

V matematické logice postupujeme takto:

- a) Přistoupíme na matematickou řeč o formách.
- b) Nadefinujeme, co je formule predikátové logiky prvního řádu v jazyce L.
- c) Nadefinujeme pravidla kalkulu.
- d) Nadefinujeme, co je struktura pro jazyk L.
- e) Nadefinujeme, co je platnost formule v jazyce L ve struktuře pro jazyk L.
- f) Zvolíme jazyk L.
- g) Zvolíme teorii T (tj. množinu uzavřených formulí v jazyce L).
- h) Dokážeme v teorii T nějaké teoremy (tj. odvodíme nějaké formule v jazyce L podle pravidel kalkulu).
- i) Usoudíme, jak bude vypadat třída struktur pro jazyk L, v níž bude platit teorie T (tj. v níž budou platit všechny formule z T).

Při tomto postupu si (i bez pomoci filosofů) klademe tyto otázky:

Co nás vede k těmto definicím?

Co nás vede ke zvolení tohoto jazyka L a této teorie T?

Jakou úlohu hrají pravidla kalkulu?

Co tvoří struktury (tj. co jsou prvky nosičů struktur)?

2. Rozvedení otázek

Při čtení a promýšlení Descartových *Regulae ad directionem ingenii* můžeme tyto otázky v určitém směru rozvést a prohloubit.¹

V komentáři k prvnímu pravidlu Descartes říká, že

*„...cum scientiae omnes nihil aliud sint quam humana sapientia, quae semper una & eadem manet, quantumvis differentibus subjectis applicata...“*² (Reg. I, 360/7)

čímž rozvádí svou tezi, že musíme vynášet soudy o všem, co se nám naskytne. Chce-li matematická logika využít všech možností rozumu, nesmí předpokládat omezení svého použití ničím vnějším.

Protože nesmíme předpokládat nebo jinak zvnějšku přijmout žádné omezení, nemůžeme odpovídat na otázky po původu definic odkazem na vnější, tj. mimologické danosti (např. na to, že prvky struktur mohou být čísla a jazyk symbolizuje aritmetické věty v závislosti na tom, jak aritmetika skutečně vypadá).³ To nás vede k otázce:

Čím se v matematické logice řídíme, neřídíme-li se ničím vnějším?

V komentáři k druhému pravidlu Descartes říká, že

*„...rectum veritatis iter quaerentes circa nullum objectum debere occupari, de quo non possint habere certitudinem Arithmetice & Geometricis demonstrationibus aequalem.“*⁴ (Reg. II, 366/6)

čímž rozvádí svou tezi, že nesmíme soudit o ničem, o čem nejsme schopni soudit s jistotou. Jistota souzení podle něj není výsledkem správného myšlení, ale jeho předpokladem. To můžeme vidět z vět

„... deductionem vero, sive illationem puram unius ab altero, posse quidem omitti, si non videatur, sed nunquam male fieri ab intellectu vel minimum rationali. Et parum ad hoc prodesse

¹ Nesnažím se tu o celkový výklad Descartova textu, pouze si z něj vybírám, co potřebuji.

² *„...veškeré vědy nejsou nic jiného než lidská moudrost, která je stále jedna a tatáž, jakkoli mnohým předmětům se věnuje...“* (český překlad V. Balík, Oikoymenh, 2000, str. 9)

³ Kdybychom například našli spor v tom, co se v aritmetice považuje za platné, a nemohli ho žádnou dílčí úpravou odstranit, konstruovali bychom sporné systémy?

⁴ *„...lidé hledající správnou cestu k pravdě se nemají zaměstnávat žádným předmětem, o němž nemohou mít jistotu rovnocennou aritmetickým a geometrickým důkazům.“* (český překlad V. Balík, Oikoymenh, 2000, str. 19)

mihi videntur illa Dialecticorum vincula, quibus rationem humanam regere se putant, etiamsi eadem alijs vsibus aptissima esse non negem."⁵ (Reg. II, 365/2)

Zda je posloupnost formulí důkazem matematické logiky, rozhodujeme podle definovaných pravidel, ale to předpokládá jistotu v jejich použití. Matematická jistota usuzování tedy není tím, co matematická logika konstruuje, ale tím, co předpokládá. To nás vede k otázce:

K čemu nám jsou pravidla kalkulu, když jistotu usuzování předpokládáme?

V komentáři k třetímu pravidlu Descartes říká, že

*„...neque enim vnquam, exempli gratia, Mathematici evademus, licet omnes aliorum demonstrationes memoria teneamus, nisi simus etiam ingenio apti ad quaecumque problemata resolvenda;...“*⁶ (Reg. III, 367/16)

čímž rozvádí svou tezi, že nám musí jít o myšlení (o nahlížení a o usuzování) jako o činnost, nikoli jako o výsledky nebo záznamy činnosti. Má-li nám v tom být matematická logika užitečná, nemůže být její smysl jen v zaznamenávání již dosažených výsledků. Žádný zápis úsudku ale nikdy nebude ničím jiným, než záznamem již dosaženého výsledku. To nás vede k otázce:

Jak nám je matematická logika užitečná, neslouží-li jen k záznamu výsledků?

V komentáři k čtvrtému pravidlu Descartes říká, že

*„...illa omnia tantum, in quibus ordo vel mensura examinatur, ad Mathesim referri, nec interesse vtrum in numeris, vel figuris, vel astris, vel sonis, aliove quovis objecto, talis mensura quaerenda sit;...“*⁷ (Reg. IV, 377/23)

⁵ „...dedukci, neboli čisté vyvozování jedné věci z jiné, můžeme sice pominout, pokud ji nechceme, ale nikdy nemůže být provedena nesprávně intelektem aspoň trochu rozumným. A zdá se mi, že tomu málo pomohou ona pouta dialektiků, jimiž se domnívají řídit lidský rozum, i když nepopírám, že k jiným účelům jsou velmi vhodná.“ (český překlad V. Balík, s úpravou, Oikoymenh, 2000, str. 17)

⁶ „...nestaneme se kupříkladu nikdy matematiky, byť bychom podrželi v paměti všechny důkazy ostatních matematiků, pokud nejsme schopni vyřešit některé příklady také rozumem;...“ (český překlad V. Balík, Oikoymenh, 2000, str. 23)

⁷ „...k matematice se vztahují pouze ty věci, u nichž lze zkoumat uspořádání či míru, a nezáleží na tom, zda onu míru určíme na číslech, stranách, obrazcích, hvězdách, zvucích nebo jakýchkoli jiných objektech.“ (český překlad V. Balík, Oikoymenh, 2000, str. 37 a 39)

čímž rozvádí svou tezi, se musíme držet toho, abychom k usuzování ani nic nepatřičného nepřidávali, ani z něj nic nezbytného neopominuli (tj. musíme se držet metody). Nedělání chyb spočívá v tom, že se držíme zkoumání „řádu a míry“, který k usuzování patří.

Protože ale „řád a míra“ patří k usuzování a ne k ničemu vnějšímu, nemůžeme je v ničem vnějším hledat. Nemáme-li v matematické logice dělat chyby, musíme se v ní držet zkoumání struktur, které k ní patří. Struktury nesmíme hledat v ničem vnějším (tedy ani v číslech braných jako něco skutečného). To nás vede k otázce:

Co jsou to struktury, nejsou-li to vlastnosti a vztahy vnějších věcí?

3. Naznačení odpovědí

Formulace otázek rozvinutých s pomocí citovaného textu už sama naznačuje směr odpovědí na původní otázky. Ty je možné dále hledat v pravidlech pátém až jedenáctém.⁸

Hlavním vodítkem pro hledání odpovědí je pojem *quaestio*, tedy otázka nebo úloha. Úloha je to, na co se v myšlení zaměříme, co chceme promyslet. Je to právě tak matematická úloha typu nalezení prvočíselného rozkladu, jako úloha matematické logiky typu nalezení nestandardního modelu Peanovy aritmetiky. Řešení úlohy je ta činnost rozumu, o níž Descartovi jde.

Všechno, co v matematické logice (která chce být spíše tím, co Descartes nazývá „obecná matematika“ než tím, co nazývá „dialektika“⁹) děláme, musí být podřízeno tomu, jaké úlohy řešíme. To nás vede k následujícím odpovědím:

Všechny definice¹⁰ podřizujeme tomu, abychom si vytvořili jazyk, který je bytostně vhodný pro řešení úlohy.

Konkrétní jazyk a teorii¹¹ volíme tak, abychom mohli vyřešit úlohu.

Pravidla kalkulu explicitně formulujeme tehdy, když na ně musíme v řešení úlohy odkazovat;¹² jinak je nepotřebujeme.

Struktury jsou tvořené předměty, obsaženými v úloze, resp. v našem rozumění úloze.¹³

⁸ Což teď dělat nebudu, protože bych to už nestihnul.

⁹ Viz Reg. IV, 378/9 nn.

¹⁰ Tj. definice z bodů b, c, d, e ze začátku tohoto textu.

¹¹ Tj. volby z bodů f, g.

¹² Například v důkazech o dokazatelnosti, které mohou být součástí řešení úlohy.

¹³ Jsou to tedy předměty v rozumu, ne vnější předměty; a proto struktury jsou strukturami úlohy, ne vnějšího světa.

Shrneme-li odpovědi, jde o to, že matematická logika není popisem nebo předpisem usuzování při řešení nějaké úlohy, ale jeho součástí; není zkoumáním pravidel nebo struktur, nacházejících se někde mimo náš rozum, ale formulováním pravidel a vytvářením struktur při řešení úlohy.

4. Další krok

Pozici a přístup R. Descarta dnes označujeme za metafyzické. Jsou vedeny představou rozumu jako čisté aktivity, která z našeho pohledu není úplně jasná. K překonání metafyziky ale nemusí patřit zapomnění na výše rozvedené otázky. Otázky musíme dále rozvést nebo odmítnout, obojí nás ale posune v rozumění matematické logice hlouběji, ne zpátky.