Matematická logika a Regulae ad directionem ingenii II.

Tomáš Holeček

1. Odpovědi na otázky

V předchozím textu o matematické logice[1] jsem na otázky

Co nás vede k definicím matematické logiky?
Co nás vede ke zvolení jazyka L a teorie T?
Jakou úlohu hrají pravidla kalkulu?
Co tvoří struktury?

navrhl s pomocí Descartových Regulae ad directionem ingenii odpovědi

Všechny definice podřizujeme tomu, abychom si vytvořili to, co je bytostně vhodné pro řešení úlohy.
Určitý jazyk a teorii volíme tak, abychom mohli vyřešit úlohu.
Pravidla kalkulu explicitně formulujeme tehdy, když na ně musíme v řešení úlohy odkazovat; jinak je nepotřebujeme.
Struktury jsou tvořené předměty, obsaženými v úloze.

tj. krátce: matematická logika není popisem nebo předpisem usuzování při řešení nějaké úlohy, ale jeho součástí; není zkoumáním pravidel nebo struktur, nacházejících

---

[1] Viz Holeček, T.: Matematická logika a Regulae ad directionem ingenii, in: Ojrech – filosofie, Úterý 2006.

se někde mimo náš rozum, ale formulováním pravidel a vytvářením struktur při řešení úlohy.

Teď se pokusím tyto odpovědi doložit z Descartova textu a ukázat jako jejich důsledky radikální odpovědi na další otázky, které si o matematické logice klademe (a na něž máme – nebo aspoň já mám – tendenci odpovídat zmateně):

Je nějaký jazyk nebo struktura prominentní?
Jsou meze rozhodnutelnosti mezemi úsudků?
Jsou důkazy nedokazatelnosti nebo bezespornosti na jiné úrovni usuzování?
Vyskytují se v úsudcích těžké kroky?

2. Doložení odpovědí

V komentáři k pátému pravidlu Descartes říká

„*...multi vel non reflectunt ad id quod praecipit, vel plane ignorant, vel praesumunt se ‹ea› non indigere, et saepe adeo inordinate difficillimas quaestiones examinant, ut mihi videantur idem facere, ac si ex infima parte ad fastigium alicujus aedificii uno saltu conarentur pervenire, vel neglectis scalae gradibus, qui ad hunc usum sunt destinati, vel non animadversis.*“[2] (Reg. V, 380)

čímž rozvádí svou tezi, že metoda spočívá v „*…ordine & dispositione eorum ad quae mentis acies est convertenda…*“[3], tj. v rozvržení úlohy. Na tom si všimněme, že rozvržení nebo řád (v přirovnání: vnitřní uspořádání schodiště a střechy) je rozvržením nebo řádem něčeho (v přirovnání: pohybu po budově) – úloha je tedy prvotní, rozvržení nebo řád jsou druhotné. Metoda nespočívá v tom, že bychom nalézali místo úlohy v řádu, ale řád v úloze. Na tomto důrazu stojí moje minulá odpověď:

Všechny kroky matematické logiky podřizujeme úloze.

Musím ale pro ni najít víc dokladů v textu, protože zatím je to jenom interpretační důraz. V komentáři k šestému pravidlu rozlišuje Descartes absolutní od relativního, přičemž říká

---

2 „*...mnozí buď neberou v úvahu, co toto pravidlo přikazuje, nebo o tom vůbec nevědí, nebo si myslí, že takové pravidlo nepotřebují, a často se pouštějí do nejtěžších úloh tak neuspořádaně, že dělají, zdá se mi, totéž, jako kdyby se pokoušeli dostat z nejnižšího místa nějaké budovy na její střechu jediným skokem opomíjejíce či si nevšímajíce schodiště, které je k výstupu nahoru určeno...*“ (český překlad, Oikoymenh, 2000, str. 43)

3 „*… v uspořádání a rozvržení toho, na co se má ostří mysli zaměřit…*“ (český překlad, Oikoymenh, 2000, str. 43)

„*… res omnes per quasdam series posse disponi, non quidem in quantum ad aliquod genus entis referuntur, sicut Philosophi in categorias suas diviserunt, sed in quantum unae ex aliis cognosci possunt…*“[4] (Reg. VI, 381)

a o kus dál

„*Atque in hoc totius artis secretum consistit, ut in omnibus illud maxime absolutum diligenter advertamus. Quaedam enim sub una quidem consideratione magis absoluta sunt quam alia, sed aliter spectata sunt magis respectiva…*“[5] (Reg. VI, 382)

čímž rozvádí svou tezi, že v každém řetězci kroků (úsudku) musíme odlišovat nejjednodušší od složitějšího, abychom našli správné rozvržení úlohy. To nejjednodušší, pro danou úlohu absolutní, ale není nejjednodušší ani absolutní mimo jakoukoli úlohu a před jakoukoli úlohou. Každý určitý jazyk matematické logiky je vystavěný z primitivních (jednoduchých, nedefinovaných) výrazů; tyto výrazy slouží při řešení úlohy jako výrazy toho, co je v úloze absolutní, a proto jsou jako absolutní vázané na úlohu. Stejně je tomu se strukturou: prvky nosné množiny i definiční relace a funkce jsou vázané na úlohu. Proto:

Žádný určitý jazyk ani struktura matematické logiky není prominentní.[6]

V komentáři k sedmému pravidlu Descartes říká

„*Est igitur haec enumeratio, sive inductio, eorum omnium, quae ad propositam aliquam quaestionem spectant, tam diligens et accurata perquisitio, ut ex illa certo evidenterque concludamus, nihil a nobis perperam fuisse praetermissum…*“[7] (Reg. VII, 388)

čímž rozvádí svou tezi, že k tomu, abychom poznali všechno, co poznat můžeme, potřebujeme *enumeratio*, výčet. Často totiž úsudek překročí možnosti přímého náhledu (intuice) a potřebujeme jej nějak shrnout a tím poznat, že jsme nic důležitého nevynechali. Descartes ale dál říká

[4] „*… vše lze roztřídit do jakýchsi řetězců, nikoliv podle toho, nakolik se vztahují k nějakému rodu bytí, tak jako je filosofové rozdělili do kategorií, nýbrž podle toho, nakolik lze jedny poznávat z druhých...*“ (český překlad, Oikoymenh, 2000, str. 45)

[5] „*V tom spočívá tajemství celé té dovednosti, že se důsledně zaměřujeme na to, co je ze všeho v nejvyšší míře absolutní. Některé věci jsou sice z jednoho hlediska více absolutní než jiné, ale z jiného pohledu jsou více relativní…*“ (český překlad, Oikoymenh, 2000, str. 47)

[6] Označení určitého jazyka nebo struktury za prominentní (např. aritmetického jazyka a standardního modelu aritmetiky) může mít ovšem význam záměrného soustředění pozornosti.

[7] „*Takže výčet neboli indukce je probráním všeho, co se vztahuje k nějaké předložené otázce, a to probráním tak pečlivým a podrobným, že můžeme s jistotou a zřejmě uzavřít, že jsme z nedbalosti nic neopominuli…*“ (český překlad, Oikoymenh, 2000, str. 45)

„Porro interdum enumeratio haec esse debet completa, interdum distincta, quandoque neutro est opus; ideoque dictum tantum est, illam esse debere sufficientem.“[8] (Reg. VII, 390)

Jaké máme mít nároky na podobu výčtu, závisí na úloze; při řešení různých úloh potřebujeme různé výčty. Matematická logika toto téma rozvíjí jako rozhodnutelnost, tj. jako možnost vytvoření algoritmu, s jehož pomocí můžeme rozhodnout o tom, co je a co není důkaz určité formule v určité teorii (pro nás: řešení úlohy). Jak má takový algoritmus vypadat, tedy jaké jsou v něm přípustné kroky, závisí na úloze (např. při řešení mnoha matematických úloh je vhodné určit rozhodnutelnost pomocí obecně rekurzivních funkcí, tak jak se to dělá; ne však při řešení všech). Proto:

Meze rozhodnutelnosti jsou mezemi úsudků, ale závisí na úloze, co je rozhodnutelnost.

V komentáři k osmému pravidlu Descartes říká

„…quidquid integrum gradum constituit in illa serie, per quam a respectivis ad absolutum quid, vel contra, veniendum est, illud necessario ante omnia quae sequuntur est examinandum. Si vero multa, ut saepe fit, ad eundem gradum pertineant, est quidem semper utile, illa omnia perlustrare ordine; hunc tamen ita stricte et rigide non cogimur observare…“[9] (Reg. VIII, 392)

a o kus dál

„…nam quicumque priores exacte servaverit circa alicujus difficultatis solutionem, et tamen alicubi sistere ab hac jubebitur, tunc certo cognoscet se scientiam quaesitam nulla prorsus industria posse invenire, idque non ingenii culpa, sed quia obstat ipsius difficultatis natura, vel humana conditio.“[10] (Reg. VIII, 393)

čímž rozvádí svou tezi, že řešení úlohy se má zastavit, narazíme-li v jejím rozvržení na nezbytný krok, na který nestačíme. V tom případě poznáme, že úloha je pro nás

---

[8] *„Někdy musí být ten výčet úplný, někdy rozlišený, někdy není nutno ani jedno ani druhé: proto jsme pouze řekli, že musí být dostatečný.“* (český překlad, Oikoymenh, 2000, str. 59)

[9] *„… cokoli v onom řetězci tvoří samostatný stupeň, přes nějž se musí postupovat od věcí relativních k něčemu absolutnímu či naopak, je nutno to prozkoumat dříve než všechno, co následuje. Jestliže se k témuž stupni vztahuje mnoho věcí, jak tomu často bývá, je zajisté vždy užitečné projít je všechny po pořádku. Zde však nejsme nuceni dodržovat pořadí postupu tak důsledně a přísně…“* (český překlad, s úpravou, Oikoymenh, 2000, str. 63)

[10] *„…neboť kdokoli bude při řešení nějaké úlohy přesně zachovávat předcházející pravidla, a přesto ho ta úloha donutí se někde zastavit, tehdy s jistotou pozná, že k dosažení žádaného poznání nemůže dojít žádnou pílí, a to nikoli vinou slabosti rozumu, nýbrž proto, že se do cesty staví povaha samotné úlohy, anebo lidský úděl.“* (český překlad, s úpravou, Oikoymenh, 2000, str. 63)

neřešitelná. Ovšem ne každý krok v rozvrhu řešení úlohy je nezbytný, některé je možné vynechat, aniž bychom tím udělali chybu. Protože jakékoli řešení úlohy má její rozvržení jako svůj první krok (nelze řešit úlohy náhodně) a k tomu patří, že o každém kroku rozhodneme, zda je nezbytný nebo ne, patří případné poznání neřešitelnosti úlohy k jejímu řešení. Rozvrhování úlohy a usuzování o dalších krocích patří k samotnému řešení. Všechny důkazy o nedokazatelnosti (a speciálně i o nedokazatelnosti sporu, tedy o bezespornosti) patří k řešení úlohy (speciálně k řešení úlohy najít spor).[11] Proto:

Důkazy nedokazatelnosti a bezespornosti jsou na téže úrovni, jako ostatní důkazy.

V komentáři k devátému pravidlu Descartes říká

„*… qui vere sciunt, aequa facilitate dignoscere veritatem, sive illam ex simplici subjecto, sive ex obscuro eduxerint: unamquamque enim simili, unico, et distincto actu comprehendunt, postquam semel ad illam pervenerunt…*“[12] (Reg. IX, 401)

čímž rozvádí svou tezi, že máme rozvíjet pronikavost rozumu tím, že si budeme pozorně všímat nejjednodušších věcí. Úlohy totiž mohou být složitější nebo jednodušší, ale všechny samostatné kroky v jejich řešení jsou stejně lehké. To znamená, že v matematické logice nikdy neopustíme jednoduchost primitivních výrazů a axiomů na jedné straně, a jednoduchost struktur na druhé straně, pokud jde o lehkost kroků v úsudku (samostatné kroky v úsudcích o nekonečných strukturách nemohou být těžší, než v úsudcích o malých konečných strukturách). Proto:

V úsudcích se nevyskytují těžké kroky.

3. Vztah k sylogistice

Matematická logika se od sylogistiky liší – kromě jiného – tím, že není popisem ani předpisem usuzování. To teď ukážu na tom, proč se na ni nevztahují Descartovy námitky proti sylogistice.

V komentáři k desátému pravidlu Descartes říká

---

11 Což znamená, že vše, co matematická logika používá v těchto důkazech, tj. celý jazyk a silné předpoklady teorie modelů patří k samotnému řešení úlohy.

12 „*… ti lidé, kteří dosáhli skutečného vědění, rozpoznávají pravdu se stejnou lehkostí, ať už ji vyvodili z prostého předmětu či z nejasného: každou jednotlivou pravdu, jakmile k ní dospějí, totiž pojmou prostým, jediným a zřetelným úkonem…*“ (český překlad, Oikoymenh, 2000, str. 79)

„… *quasdam formas disserendi praescribunt, quae tam necessario concludunt, ut illis confisa ratio, etiamsi quodammodo ferietur ab ipsius illationis evidenti et attenta consideratione, possit tamen interim aliquid certum ex vi formae concludere.*“[13] (Reg. X, 405 – 406)

čímž charakterizuje sylogistiku (které říká *Dialectica*). Mohlo by se zdát, že pohyb silou samotné formy je i pro matematickou logiku určující (v podobě formálních jazyků, jejichž skladebná a transformační pravidla zkoumá jako syntaxi), ale ukážu, že to tak není. To mě vede k otázce

O co jde v matematické logice?

Ještě se vrátím k čtvrtému pravidlu; v komentáři k němu Descartes říká

„… *Neque enim etiam illa extendi potest ad docendum, quomodo hae ipsae operationes faciendae sint, quia sunt omnium simplicissimae et primae, adeo ut, nisi illis uti jam ante posset intellectus noster, nulla ipsius methodi praecepta quantumcumque facilia comprehenderet. Aliae autem mentis operationes, quas harum priorum auxilio dirigere contendit Dialectica, hic sunt inutiles, vel potius inter impedimenta numerandae, quia nihil puro rationis lumini superaddi potest, quod illud aliquo modo non obscuret.*“[14] (Reg. IV, 372 – 373)

čímž rozvádí svou tezi o nutnosti metody, která spočívá jen v tom, neudělat chybu při intuici a vést dedukci tak, aby nic nechybělo. Jakákoli další pravidla usuzování už jednak schopnost intuice a dedukce předpokládají, jednak ji svou přítomností zatemňují. Matematická logika používá explicitní pravidla kalkulů, pravidla splňování ve strukturách (podmínky pravdivosti formulí vzhledem k určité struktuře) apod. Samotné usuzování však neprovádíme podle těchto pravidel, nýbrž o těchto pravidlech – anebo je při usuzování bereme (doopravdy) jako jeden z předpokladů, přičemž samotný úsudek už opět spočívá jen v jednoduchém náhledu nebo v jejich řetězci.[15] Proto:

---

[13] „… *předepisují jakési formy řeči, které ústí do tak nevyhnutelných závěrů, že rozum, jenž na ně spolehl, je schopen dojít k určitému jistému závěru silou jen té samotné formy, přičemž si jaksi odpustil zřejmé a bedlivé pozorování samotného vyvození…*“ (český překlad, Oikoymenh, 2000, str. 87)

[14] „… *A také tu metodu nelze rozšiřovat o poučení, jak ty samotné úkony provádět, protože jsou ze všech nejjednodušší a elementární, takže není-li náš intelekt schopen s nimi zacházet již předem, nepochopí žádné poučky té metody, byť by byla jakkoli snadná. Další úkony mysli, které pomocí těch prve jmenovaných chce řídit dialektika, jsou zde zbytečné, ba spíše je musíme počítat mezi překážky, protože k čistému světlu rozumu nelze přidat nic, co by je nějak nezatemňovalo.*“ (český překlad, Oikoymenh, 2000, str. 31)

[15] Nakolik si toho je matematická logika vědomá (asi vnitřní silou tradice, spíše než zájmem o svůj původ) je vidět např. v úvodu ke knize Vítězslava Švejdara: kniha je „… *určena nikoliv čtenářům, kteří se chtějí naučit logicky myslet, nýbrž čtenářům, kteří logicky myslet už dávno umějí, a to zpravidla proto, že udělali nějakou zkušenost s univerzitní matematikou.*“ (Švejdar, V.: Logika, neúplnost, složitost a nutnost, Academia,

V matematické logice pravidla nezatemňují schopnost usuzování.

V komentáři k desátému pravidlu Descartes dál říká

„Quippe advertimus elabi saepe veritatem ex istis vinculis, dum interim illi ipsi, qui usi sunt, in iisdem manent irretiti…“[16] (Reg. X, 406)

což je námitka proti jakémukoli pohybu silou samotné formy, který má být vedený pravidly usuzování. Vždy se objeví úloha, která bude vyžadovat opuštění nebo překročení těchto pravidel. V matematické logice zkoumáme meze různě definovaných formálních jazyků a teorií (ať už se jedná o hledání co nejslabších jazyků a teorií a zjišťování, na co všechno – navzdory své slabosti – stačí, nebo o hledání co nejsilnějších jazyků a teorií a zjišťování, na co všechno – navzdory své síle – nestačí) a často je v úsudku opouštíme. Samotná forma nemá v matematické logice úlohu, kterou měla v sylogistice.

O kus dál Descartes říká

„Quamobrem hic nos praecipue caventes ne ratio nostra ferietur, dum alicujus rei veritatem examinamus, rejicimus istas formas ut adversantes nostro instituto, et omnia potius adjumenta perquirimus, quibus cogitatio nostra retineatur attenta…“[17] (Reg. X, 406)

což je vyhlášení záměru zásadně odporujícímu sylogistice, pokud její formy bereme jako náhradu vlastního usuzování. Udržet rozum v bdělosti a pozornosti je záměr, který matematické logice neodporuje, pokud její formy bereme jako předměty zkoumání – tj. tak, jak bral Descartes geometrické útvary. V tom případě je s ní naopak v naprostém souladu. Proto:

Matematická logika nemá nahrazovat usuzování.

Ještě dál Descartes říká

2002, str. 5) a ještě lépe na obalu: *„Autor se nesnaží poučovat čtenáře o tzv. správném myšlení, chce však klást důraz na řešení problémů a na srozumitelný výklad, který postupuje od kladení otázek k nalézání odpovědí.“*

[16] *„Vidíme však, že pravda často z oněch pout vyklouzne, zatímco ti, kteří s nimi zacházejí, v nich zůstávají zapleteni…“* (český překlad, Oikoymenh, 2000, str. 87)

[17] *„Z těchto důvodů zde hlavně bráníme tomu, aby náš rozum odpočíval, když zkoumáme pravdu o nějaké věci, a odhazujeme ony formy jako odporující našemu záměru a spíše pátráme po všech pomocných prostředcích, které by udržely naše myšlení v pozornosti…“* (český překlad, s úpravou, Oikoymenh, 2000, str. 87)

„… nullum posse Dialecticos syllogismum arte formare, qui verum concludat, nisi prius ejusdem materiam habuerint, id est, nisi eamdem veritatem, quae in illo deducitur, jam ante cognoverint…“[18] (Reg. X, 406)

což uvádí jako důvod pro to, že sylogistika má patřit spíše k rétorice (jako způsob předvádění výsledků) než k filosofii. Matematická logika ale zvládnutí matérie nepředpokládá; záměrně si v ní klademe otázky, na které předem neznáme odpovědi a pouštíme se v ní do oblastí, v kterých se předem nevyznáme. V tomto smyslu se neomezujeme ani na současný stav aritmetiky, ani na nic jiného. Proto:

Matematická logika má rozšiřovat usuzování.

Konečně v komentáři k jedenáctému pravidlu Descartes říká

„Qua quidem ratione ingenii tarditatem emendari nemo non videt, et illius etiam amplificari capacitatem. Sed insuper advertendum est, maximam hujus regulae utilitatem in eo consistere, quod ad mutuam simplicium propositionum dependentiam reflectendo, usum acquiramus subito distinguendi, quid sit magis vel minus respectivum, et quibus gradibus ad absolutum reducatur…“[19] (Reg. XI, 409)

čímž rozvádí svou tezi, že spojováním a opakovaným procházením náhledu a výčtu se schopnosti usuzování rozšiřují (i když rozum zůstává stejný, rozšiřuje se naše kapacita pro zvládání forem). Kromě cvičení (přičemž ke školním cvičením je podle něj vhodná i sylogistika) je ale hlavním cílem řešení úloh. To se vztahuje i na matematickou logiku. Proto:

Matematická logika má cvičit usuzování, ale především řešit úlohy.

3. Námitky

Uvedené teze nabízím jako pojetí matematické logiky jako karteziánské obecné matematiky. Nevztahují se vůbec na to, čemu se dneska říká filosofická logika; ta sice více nebo méně nástroje matematické logiky používá, ale jinak.

---

[18] *„…dialektikové nejsou s to uměle sestrojit jediný sylogismus, který by vyústil v pravdivý závěr, pokud už předtím neměli zvládnutou jeho matérii, to jest, pokud onu pravdu, která se pomocí toho sylogismu vyvozuje, už předtím neznali.“* (český překlad, Oikoymenh, 2000, str. 87)

[19] *„Každý vidí, že tímto způsobem se překonává malátnost rozumu a dokonce se zvyšuje jeho schopnost. Ale kromě toho je potřeba poznamenat, že největší užitek tohoto pravidla je v tom, že obrací pozornost k vzájemné závislosti jednoduchých výroků, což rychle dopomáhá ke zběhlosti v rozlišování toho, co je více či méně relativní a po kterých stupních vede cesta k absolutnímu…“* (český překlad, Oikoymenh, 2000, str. 91)

Pokud někdo chce odmítat „matematizaci novověké vědy“, měl by, podle mého mínění, odmítnout smysluplnost aspoň některé uvedené otázky, nebo přijetí aspoň některé uvedené teze. Ještě zásadnější námitka by ale mohla být:

Uvedené otázky nejsou důležité.

což by byla námitka vycházející z určitého aspektu dnešního ducha. Její oprávněnost teď ale nevidím.