Moderní logika

(verze z ledna 2024)

Podle začátku spisu RUSSELL, B., WHITEHEAD, A. N. *Principia Mathematica I.* 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press. 1927.

Co vidíme nejprve (ang. *primitive ideas*)

Jednoduché proposice (česky obvykle „výroky“, ang. *elementary propositions*, z lat. *pōnō*, kladu; užíváme [pro ně] proměnné, ang. *variables*, z lat. *varius*, pestrý: p, q, r, s) jsou proposice, tj. výrazy (ang. *expressions*) buď pravdivé, anebo lživé, neobsahující žádné proměnné.

Jednoduché propoziční funkce (česky obvykle „výrokové funkce“, ang. *elementary propositional functions,* z lat. *fungor,* věnuji se) jsou výrazy obsahující proměnné, které se po ohodnocení (z ang. *value*, z lat. *valeō*, zvládám) svých proměnných stanou jednoduchými proposicemi; těm říkáme její hodnoty.

Přisazení (česky obvykle „tvrzení“, ang. *assertion*; ⊦) je přidání jednoduché proposice nebo jednoduché propoziční funkce i se všemi jejími instancemi (z lat. *stō*, stojím) do našeho rozvoje.

Negace (ang. *negation*, z lat. *ne*, ne; ~p) je jednoduchá propoziční funkce jedné proměnné [pro] jednoduché proposice, jejíž hodnota je pravdivá, byla-li hodnota proměnné lživá, a lživá, byla-li pravdivá.

Disjunkce (ang. *disjunction*, z lat. *iungō*, pojím; p ∨ q) je jednoduchá propoziční funkce dvou proměnných [pro] jednoduché proposice, jejíž hodnota je pravdivá, byla-li aspoň jedna z hodnot proměnných pravdivá, a lživá, byly-li obě lživé.

Definice implikace (ang. *implication*, z lat. *plicō*, pletu)

*1.01 p → q je zkratka za ~p ∨ q

Prvotní proposice (ang. *primitive propositions*)

*1.1 Cokoli implikovaného pravdivou jednoduchou proposicí je pravdivé. („pravidlo inference“, ang. *rule of inference*, z lat. *regō*, spravuji, a z lat. *ferō*, resp. z řec. φέρω, nesu)

*1.2 $\vdash (p \lor p) \to p$

*1.3 $\vdash q \to (p \lor q)$

*1.4 $\vdash (p \lor q) \to (q \lor p)$

*1.5 $\vdash (p \lor (q \lor r)) \to (q \lor (p \lor r))$

*1.6 $\vdash (q \to r) \to ((p \lor q) \to (p \lor r))$

*1.7 Negace jednoduché proposice je jednoduchou proposicí.

*1.71 Disjunkce dvou jednoduchých proposic je jednoduchou proposicí.

*1.72 V disjunkci dvou jednoduchých proposičních funkcí obsahujících tu samou proměnnou tuto proměnnou můžeme brát jako jednu.

Důsledky

*2.01 $\vdash (p \to \sim p) \to \sim p$ („princip důkazu sporem“, lat. *reductio ad absurdum*)

Důkaz:

(1): *1.2 $[p \coloneqq \sim p]$ $\vdash (\sim p \lor \sim p) \to \sim p$

(2): z (1), *1.01 $\vdash (p \to \sim p) \to \sim p$

(zápis $[p \coloneqq \sim p]$ užíváme pro substituci $\sim p$ za p, výsledkem substituce je instance původní proposice; ang. *substitution*)

*2.02 $\vdash q \to (p \to q)$

Důkaz:

(1): *1.3 $[p \coloneqq \sim p]$ $\vdash q \to (\sim p \lor q)$

(2): z (1), *1.01 $\vdash q \to (p \to q)$

*2.03 $\vdash (p \to \sim q) \to (q \to \sim p)$ („princip transposice“)

Důkaz:

(1): *1.4 $[p \coloneqq \sim p, q \coloneqq \sim q]$ $\vdash (\sim p \lor \sim q) \to (\sim q \lor \sim p)$

(2): z (1), *1.01 $\vdash (p \to \sim q) \to (q \to \sim p)$

*2.04 $\vdash (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

Důkaz:

(1): *1.5 $[p \coloneqq {\sim}p, q \coloneqq {\sim}q]$ $\vdash ({\sim}p \lor ({\sim}q \lor r)) \to ({\sim}q \lor ({\sim}p \lor r))$

(2): z (1), *1.01 $\vdash (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

*2.05 $\vdash (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ („princip sylogismu“)

Důkaz:

(1): *1.6 $[p \coloneqq {\sim}p]$ $\vdash (q \to r) \to (({\sim}p \lor q) \to ({\sim}p \lor r))$

(2): z (1), *1.01 $\vdash (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

*2.06 $\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ („princip sylogismu“)

Důkaz:

(1): *2.04 $[p \coloneqq q \to r, q \coloneqq p \to q, r \coloneqq p \to r]$

$\vdash ((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$

$\to ((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

(2): *2.05 $\vdash (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

(3): z (1) a (2), *1.1 $\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

*2.07 $\vdash p \to (p \lor p)$

Důkaz:

(1): *1.3 $[q \coloneqq p]$ $\vdash p \to (p \lor p)$

*2.08 $\vdash p \to p$

Důkaz:

(1): *2.05 $[q \coloneqq p \lor p, r \coloneqq p]$ $\vdash ((p \lor p) \to p) \to ((p \to (p \lor p)) \to (p \to p))$

(2): *1.2 $\vdash (p \lor p) \to p$

(3): z (1) a (2), *1.1 $\vdash (p \to (p \lor p)) \to (p \to p)$

(4): *2.07 $\vdash p \to (p \lor p)$

(5): z (3) a (4), *1.1 $\vdash p \to p$

*2.1 $\vdash {\sim}p \lor p$ (ang. *law of excluded middle*, „zákon vyloučeného třetího“)

Důkaz:

(1): *2.08 $\vdash p \to p$

(2): z (1), *1.01 $\vdash {\sim}p \lor p$

*2.11 $\vdash p \lor {\sim}p$ („zákon vyloučeného třetího“)

Důkaz:

(1): *1.4 [$p := \sim p$, $q := p$] $\vdash (\sim p \lor p) \rightarrow (p \lor \sim p)$

(2): *2.1 $\vdash \sim p \lor p$

(3): z (1) a (2), *1.1 $\vdash p \lor \sim p$

*2.12 $\vdash p \rightarrow \sim\sim p$ („princip dvojité negace“)

Důkaz:

(1): *2.11 [$p := \sim p$] $\vdash \sim p \lor \sim\sim p$

(2): z (1), *1.01 $\vdash p \rightarrow \sim\sim p$

*2.13 $\vdash p \lor \sim\sim\sim p$

Důkaz:

(1): *1.6 [$q := \sim p$, $r := \sim\sim\sim p$] $\vdash (\sim p \rightarrow \sim\sim\sim p) \rightarrow ((p \lor \sim p) \rightarrow (p \lor \sim\sim\sim p))$

(2): *2.12 [$p := \sim p$] $\vdash \sim p \rightarrow \sim\sim\sim p$

(3): z (1) a (2), *1.1 $\vdash (p \lor \sim p) \rightarrow (p \lor \sim\sim\sim p)$

(4): *2.11 $\vdash p \lor \sim p$

(5): z (3) a (4), *1.1 $\vdash p \lor \sim\sim\sim p$

*2.14 $\vdash \sim\sim p \rightarrow p$ („princip dvojité negace“)

Důkaz:

(1): *1.4 [$q := \sim\sim\sim p$] $\vdash (p \lor \sim\sim\sim p) \rightarrow (\sim\sim\sim p \lor p)$

(2): *2.13 $\vdash p \lor \sim\sim\sim p$

(3): z (1) a (2), *1.1 $\vdash \sim\sim\sim p \lor p$

(4): z (3), *1.01 $\vdash \sim\sim p \rightarrow p$

*2.15 $\vdash (\sim p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$ („princip transposice“)

*2.16 $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ („princip transposice“)

*2.17 $\vdash (\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ („princip transposice“)

Důkazy vynecháváme.

*2.2 $\vdash p \rightarrow (p \lor q)$

Důkaz:

(1): *1.3 [$p := q$, $q := p$] $\vdash p \rightarrow (q \lor p)$

(2): *1.4 [$p := q$, $q := p$] $\vdash (q \lor p) \rightarrow (p \lor q)$

(3): *2.06 [$q := q \lor p$, $r := p \lor q$] $\vdash (p \rightarrow (q \lor p)) \rightarrow (((q \lor p) \rightarrow (p \lor q)) \rightarrow (p \rightarrow (p \lor q)))$

(4): z (1) a (3), *1.11 $\vdash ((q \lor p) \rightarrow (p \lor q)) \rightarrow (p \rightarrow (p \lor q))$

(5): z (2) a (4), *1.11 $\vdash p \rightarrow (p \lor q)$

Takový důkaz budeme zkracovat:

(1): *1.3 [$p \coloneqq q, q \coloneqq p$] $\vdash p \rightarrow (q \lor p)$

(2): *1.4 [$p \coloneqq q, q \coloneqq p$] $\vdash (q \lor p) \rightarrow (p \lor q)$

(3): z (1) a (2), *2.06 $\vdash p \rightarrow (p \lor q)$

*2.21 $\vdash \sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$

Důkaz:

(1): *2.2 [$p \coloneqq \sim p$] $\vdash \sim p \rightarrow (\sim p \lor q)$

(2): z (1), *1.01 $\vdash \sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$

*2.3 $\vdash (p \lor (q \lor r)) \rightarrow (p \lor (r \lor q))$

Důkaz:

(1): *1.4 [$p \coloneqq q, q \coloneqq r$] $\vdash (q \lor r) \rightarrow (r \lor q)$

(2): *1.6 [$q \coloneqq q \lor r, r \coloneqq r \lor q$] $\vdash ((q \lor r) \rightarrow (r \lor q)) \rightarrow ((p \lor (q \lor r)) \rightarrow (p \lor (r \lor q)))$

(3): z (1) a (2), *1.11 $\vdash (p \lor (q \lor r)) \rightarrow (p \lor (r \lor q))$

*2.31 $\vdash (p \lor (q \lor r)) \rightarrow ((p \lor q) \lor r)$

Důkaz:

(1): *2.3 $\vdash (p \lor (q \lor r)) \rightarrow (p \lor (r \lor q))$

(2): *1.5 [$q \coloneqq r, r \coloneqq q$] $\vdash (p \lor (r \lor q)) \rightarrow (r \lor (p \lor q))$

(3): z (1) a (2), *2.05 $\vdash (p \lor (q \lor r)) \rightarrow (r \lor (p \lor q))$

(4): *1.4 [$p \coloneqq r, q \coloneqq p \lor q$] $\vdash (r \lor (p \lor q)) \rightarrow ((p \lor q) \lor r)$

(5): z (3) a (4), *2.05 $\vdash (p \lor (q \lor r)) \rightarrow ((p \lor q) \lor r)$

Takový důkaz budeme zkracovat:

(1): *2.3 $\vdash (p \lor (q \lor r)) \rightarrow (p \lor (r \lor q))$

(2): *1.5 [$q \coloneqq r, r \coloneqq q$] $\vdash \ldots \rightarrow (r \lor (p \lor q))$

(3): *1.4 [$p \coloneqq r, q \coloneqq p \lor q$] $\vdash \ldots \rightarrow ((p \lor q) \lor r)$

*2.32 $\vdash ((p \lor q) \lor r) \rightarrow (p \lor (q \lor r))$

Důkaz:

(1): *1.4 [$p \coloneqq p \lor q, q \coloneqq r$] $\vdash ((p \lor q) \lor r) \rightarrow (r \lor (p \lor q))$

(2): *1.5 [$p \coloneqq r, q \coloneqq p, r \coloneqq q$] $\vdash \ldots \rightarrow (p \lor (r \lor q))$

(3): *2.3 [$q \coloneqq r, r \coloneqq q$] $\vdash \ldots \rightarrow (p \lor (q \lor r))$

*2.38 $\vdash (q \to r) \to ((q \lor p) \to (r \lor p))$

Důkaz:

(1): *2.06 $[p \coloneqq q \lor p, q \coloneqq p \lor q, r \coloneqq p \lor r]$

$\vdash ((q \lor p) \to (p \lor q))$
$\to (((p \lor q) \to (p \lor r)) \to ((q \lor p) \to (p \lor r)))$

(2): *1.4 $[p \coloneqq q, q \coloneqq p]$ $\vdash (q \lor p) \to (p \lor q)$

(3): z (1) a (2), *1.11 $\vdash ((p \lor q) \to (p \lor r)) \to ((q \lor p) \to (p \lor r))$

(4): *2.05 $[p \coloneqq q \lor p, q \coloneqq p \lor r, r \coloneqq r \lor p]$

$\vdash ((p \lor r) \to (r \lor p))$
$\to (((q \lor p) \to (p \lor r)) \to ((q \lor p) \to (r \lor p)))$

(5): *1.4 $[q \coloneqq r]$ $\vdash (p \lor r) \to (r \lor p)$

(6): z (4) a (5), *1.11 $\vdash ((q \lor p) \to (p \lor r)) \to ((q \lor p) \to (r \lor p))$

(7): z (3) a (6), *2.06 $\vdash ((p \lor q) \to (p \lor r)) \to ((q \lor p) \to (r \lor p))$

(8): *1.6 $\vdash (q \to r) \to ((p \lor q) \to (p \lor r))$

(9): z (7) a (8), *2.05 $\vdash (q \to r) \to ((q \lor p) \to (r \lor p))$

*2.53 $\vdash (p \lor q) \to (\sim p \to q)$

Důkaz:

(1): *2.12 $\vdash p \to \sim\sim p$

(2): *2.38 $[p \coloneqq q, q \coloneqq p, r \coloneqq \sim\sim p]$ $\vdash (p \to \sim\sim p) \to ((p \lor q) \to (\sim\sim p \lor q))$

(3): z (1) a (2), *1.11 $\vdash (p \lor q) \to (\sim\sim p \lor q)$

(4): z (3), *1.01 $\vdash (p \lor r) \to (\sim p \to q)$

Atd.

Definice konjunkce

*3.01 $p \land q$ je zkratka za $\sim(\sim p \lor \sim q)$

Důsledky

*3.1 $\vdash (p \land q) \to \sim(\sim p \lor \sim q)$

Důkaz:

(1): *2.08 $[p \coloneqq \sim(\sim p \lor \sim q)]$ $\vdash \sim(\sim p \lor \sim q) \to \sim(\sim p \lor \sim q)$

(2): z (1), *3.01 $\vdash (p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$

Takový důkaz budeme zkracovat:

(1): *2.08 [$p \coloneqq \sim(\sim p \vee \sim q)$], *3.01 $\vdash (p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$

*3.11 $\vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$

Důkaz:

(1): *2.08 [$p \coloneqq \sim(\sim p \vee \sim q)$], *3.01 $\vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$

*3.12 $\vdash \sim p \vee (\sim q \vee (p \wedge q))$

Důkaz:

(1): *2.11 [$p \coloneqq \sim p \vee \sim q$], *3.01 $\vdash (\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q)$

(2): *2.32 [$p \coloneqq \sim p$, $q \coloneqq \sim q$, $r \coloneqq p \wedge q$]

$\vdash ((\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q)) \rightarrow (\sim p \vee (\sim q \vee (p \wedge q)))$

(3): z (1) a (2), *1.11 $\vdash \sim p \vee (\sim q \vee (p \wedge q))$

Takový důkaz budeme zkracovat:

(1): *2.11, *3.01 $\vdash (\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q)$

(3): z (1), *2.32 $\vdash \sim p \vee (\sim q \vee (p \wedge q))$

*3.13 $\vdash \sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

Důkaz:

(1): *3.11 $\vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$

(2): z (1), *2.15 $\vdash \sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

*3.14 $\vdash (\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(p \wedge q)$

Důkaz:

(1): *3.1 $\vdash (p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$

(2): z (1), *2.03 $\vdash (\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(p \wedge q)$

*3.2 $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$

Důkaz:

(1): *3.12, *1.01 $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$

*3.22 $\vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$

Důkaz:

(1): *3.13 $\vdash \sim(q \land p) \rightarrow (\sim q \lor \sim p)$

(2): *1.4 $\vdash \ldots \rightarrow (\sim p \lor \sim q)$

(3): *3.14 $\vdash \ldots \rightarrow \sim(p \land q)$

(4): (3), *2.17 $\vdash (p \land q) \rightarrow (q \land p)$

*3.24 $\vdash \sim(p \land \sim p)$ (ang. *law of contradiction*, „zákon sporu“)

Důkaz:

(1): *2.11 $\vdash \sim p \lor \sim\sim p$

(2): z (1), *3.14 $\vdash \sim(p \land \sim p)$

*3.26 $\vdash (p \land q) \rightarrow p$

Důkaz:

(1): *2.02, *1.01 $\vdash \sim p \lor (\sim q \lor p)$

(2): z (1), *2.31 $\vdash (\sim p \lor \sim q) \lor p$

(3): z (2), *2.53 $\vdash \sim(\sim p \lor \sim q) \rightarrow p$

(4): z (3), *3.01 $\vdash (p \land q) \rightarrow p$

*3.27 $\vdash (p \land q) \rightarrow q$

Důkaz:

(1): *3.22 $\vdash (p \land q) \rightarrow (q \land p)$

(2): *3.26 $\vdash \ldots \rightarrow q$

*3.3 $\vdash ((p \land q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

Důkaz:

(1): *2.08, *3.01 $\vdash ((p \land q) \rightarrow r) \rightarrow (\sim(\sim p \lor \sim q) \rightarrow r)$

(2): *2.15 $\vdash \ldots \rightarrow (\sim r \rightarrow (\sim p \lor \sim q))$

(3): *2.08, *1.01 $\vdash \ldots \rightarrow (\sim r \rightarrow (p \rightarrow \sim q))$

(4): *2.04 $\vdash \ldots \rightarrow (p \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim q))$

(5): *2.17 $\vdash (\sim r \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow r)$

(6): z (5), *2.05 $\vdash (p \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim q)) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

(7): z (4) a (6), *2.06 $\vdash ((p \land q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

*3.31 $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \land q) \rightarrow r)$

Důkaz:

(1): *2.08, *1.01 $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (\sim p \lor (\sim q \lor r))$

(2): *2.3 $\vdash \ldots \rightarrow ((\sim p \lor \sim q) \lor r)$

(3): *2.53 $\vdash \ldots \rightarrow (\sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow r)$

(4): *2.08, *3.01 $\vdash \ldots \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$

*3.33 $\vdash ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ („princip sylogismu“)

*3.34 $\vdash ((q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ („princip sylogismu“)

*3.35 $\vdash (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

*3.43 $\vdash ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$

*3.45 $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r))$

*3.47 $\vdash ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s))$

Důkazy vynecháváme.

Atd.

Definice ekvivalence (ang. *equivalence*)

*4.01 $p \leftrightarrow q$ je zkratka za $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Důsledky

*4.1 $\vdash (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ („princip transposice“)

*4.11 $\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$ („princip transposice“)

*4.13 $\vdash p \leftrightarrow \sim\sim p$ („princip dvojité negace“)

*4.2 $\vdash p \leftrightarrow p$

*4.21 $\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

*4.22 $\vdash ((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$

*4.24 $\vdash p \leftrightarrow (p \wedge p)$

*4.25 $\vdash p \leftrightarrow (p \vee p)$

*4.3 $\vdash (p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

*4.31 $\vdash (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

*4.32 $\vdash ((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$

*4.33 $\vdash ((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$

*4.4 $\vdash (p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

*4.41 $\vdash (p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

Důkazy vynecháváme.

Atd.

Důkazy s *1.7

*2.01 $\vdash (p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$

Důkaz:

(1): *1.2	$\vdash (p \vee p) \rightarrow p$
(2): *1.7	$\sim p$ je jednoduchá proposiční funkce
(3): z (2), *1.71,*1.72	$\sim p \vee \sim p$ je jednoduchá proposiční funkce s jednou proměnnou
(4): z (3), *1.7	$\sim(\sim p \vee \sim p)$ je jednoduchá proposiční funkce
(5): z (2) a (4), *1.71,*1.72	$\sim(\sim p \vee \sim p) \vee \sim p$ je jednoduchá proposiční funkce s jednou proměnnou
(6): z (5), *1.01	$(\sim p \vee \sim p) \rightarrow \sim p$ je jednoduchá proposiční funkce
(7): z (6) a (1) $[p \coloneqq \sim p]$	$\vdash (\sim p \vee \sim p) \rightarrow \sim p$
(8): z (7), *1.01	$\vdash (p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$

Atd.

Co dále vidíme nejprve

Proposice mohou obsahovat zdánlivé (dnes česky obvykle „vázané“, ang. původně *apparent*, dnes *bound*) proměnné.

Proposiční funkce (φ, ψ, χ s proměnnými x, y, z: φx, φxy, ψx) se po ohodnocení svých proměnných stanou proposicemi.

Universální kvantifikátor (česky obvykle „obecný“, ang. *universal quantifier*; $\forall x\ \varphi x$, kde x je zdánlivá proměnná) je proposiční funkce jedné proměnné [pro] proposiční funkce, jejíž hodnota je pravdivá, byla-li hodnota proměnné taková, že všechny její hodnoty jsou pravdivé, a lživá, je-li aspoň jedna lživá.

Individuum (ang. *individual*, z lat. *dīvidō*, dělím) je výraz, obsažený v jiných výrazech, jenž není ani propozicí, ani propoziční funkcí.

Rozšíření spojek

Spolu s negací a disjunkcí rozšíříme i definice implikace, konjunkce a ekvivalence i na ne-jednoduché propozice.

Definice existenčního kvantifikátoru

*10.01 $\exists x\, \varphi x$ je zkratka za $\sim\forall x \sim\varphi x$

Definice stejnosti typu (ang. *being of the same type*, z lat. *typus*, resp. z řec. τύπτω, razím)

*9.131 Že dva výrazy jsou stejného typu, je zkratka za to, že:

- jsou oba individua
- nebo jsou oba jednoduché propozice
- nebo oba obsahují pouze proměnné stejných typů

Další prvotní propozice

*9.12 Cokoli implikovaného něčím pravdivým je pravdivé. („pravidlo inference“)
*9.13 Co je pravdivé o čemkoli, jakkoli vybraném, je pravdivé o všem. („pravidlo universální generalizace“, ang. *rule of universal generalization*, z lat. *genus*, resp. z řec. γένος, rod)
*9.14 Jakkoli je výraz obsahující proměnnou smysluplný, je smysluplný pouze s výrazem stejného typu jako je ta proměnná na jejím místě. („pravidlo typů“)
*10.1 $\vdash \forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y$
*10.12 $\vdash \forall x\, (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x\, \varphi x)$

Důsledky

*10.14 $\vdash (\forall x\, \varphi x \wedge \forall x\, \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$

Důkaz:

(1): *10.1 $\vdash \forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y$

(2): *10.1 [$\varphi x \coloneqq \psi x$] $\vdash \forall x\, \psi x \rightarrow \psi y$

(3): *3.2 [$p \coloneqq \forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y$, $q \coloneqq \forall x\, \psi x \rightarrow \psi y$]

$\vdash (\forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y) \rightarrow ((\forall x\, \psi x \rightarrow \psi y)$

$\rightarrow ((\forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x\, \psi x \rightarrow \psi y)))$

(4): z (1) a (3), *9.12 $\vdash (\forall x\, \psi x \rightarrow \psi y) \rightarrow ((\forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x\, \psi x \rightarrow \psi y))$

(5): z (2) a (4), *9.12 $\vdash (\forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x\, \psi x \rightarrow \psi y)$

(6): *3.47[$p \coloneqq \forall x\, \varphi x$, $q \coloneqq \forall x\, \psi x$, $r \coloneqq \varphi y$, $s \coloneqq \psi y$]

$\vdash ((\forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x\, \psi x \rightarrow \psi y))$

$\rightarrow ((\forall x\, \varphi x \wedge \forall x\, \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y))$

(7): z (5) a (6), *9.12 $\vdash (\forall x\, \varphi x \wedge \forall x\, \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$

Takový důkaz budeme zkracovat:

(1): *10.1 $\vdash \forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y$

(2): *10.1 [$\varphi x \coloneqq \psi x$] $\vdash \forall x\, \psi x \rightarrow \psi y$

(3): z (1) a (2), *3.2 $\vdash (\forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x\, \psi x \rightarrow \psi y)$

(4): z (3), *3.47 $\vdash (\forall x\, \varphi x \wedge \forall x\, \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$

*10.2 $\vdash \forall x\, (p \vee \varphi x) \leftrightarrow (p \vee \forall x\, \varphi x)$

Důkaz:

(1): *10.1 $\vdash \forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y$

(2): z (1), *1.6 $\vdash (p \vee \forall x\, \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y)$

(3): z (2), *9.13 $\vdash \forall y\, ((p \vee \forall x\, \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$

(4): z (3), 10.12, *1.01 $\vdash (p \vee \forall x\, \varphi x) \rightarrow \forall y\, (p \vee \varphi y)$

(5): *10.12 $\vdash \forall x\, (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x\, \varphi x)$

(6): z (4) a (5), *3.2, *4.01 $\vdash \forall x\, (p \vee \varphi x) \leftrightarrow (p \vee \forall x\, \varphi x)$

*10.21 $\vdash \forall x\, (p \rightarrow \varphi x) \leftrightarrow (p \rightarrow \forall x\, \varphi x)$

Důkaz:

(1): *10.2, *1.01 $\vdash \forall x\, (p \rightarrow \varphi x) \leftrightarrow (p \rightarrow \forall x\, \varphi x)$

*10.22 $\vdash \forall x\, (\varphi x \land \psi x) \leftrightarrow (\forall x\, \varphi x \land \forall x\, \psi x)$

Důkaz:

(1): *10.1	$\vdash \forall x\, (\varphi x \land \psi x) \rightarrow (\varphi y \land \psi y)$
(2): *3.26	$\vdash \ldots \rightarrow \varphi y$
(3): z (2), *9.13	$\vdash \forall y\, (\forall x\, (\varphi x \land \psi x) \rightarrow \varphi y)$
(4): *10.21	$\vdash \forall y\, (\forall x\, (\varphi x \land \psi x) \rightarrow \varphi y) \leftrightarrow (\forall x\, (\varphi x \land \psi x) \rightarrow \forall y\, \varphi y)$
(5): z (4), *4.01, *3.26	$\vdash \forall y\, (\forall x\, (\varphi x \land \psi x) \rightarrow \varphi y) \rightarrow (\forall x\, (\varphi x \land \psi x) \rightarrow \forall y\, \varphi y)$
(6): z (3) a (5), *9.12	$\vdash \forall x\, (\varphi x \land \psi x) \rightarrow \forall y\, \varphi y$
(7): analogicky, *3.27	$\vdash \forall x\, (\varphi x \land \psi x) \rightarrow \forall y\, \psi y$
(8): z (6) a (7), *3.43	$\vdash \forall x\, (\varphi x \land \psi x) \rightarrow (\forall y\, \varphi y \land \forall y\, \psi y)$
(9): *10.14	$\vdash (\forall x\, \varphi x \land \forall x\, \psi x) \rightarrow (\varphi y \land \psi y)$
(10): z (9), *9.13	$\vdash \forall y\, ((\forall x\, \varphi x \land \forall x\, \psi x) \rightarrow (\varphi y \land \psi y))$
(11): *10.21	$\vdash \forall y\, ((\forall x\, \varphi x \land \forall x\, \psi x) \rightarrow (\varphi y \land \psi y))$
	$\leftrightarrow ((\forall x\, \varphi x \land \forall x\, \psi x) \rightarrow \forall y\, (\varphi y \land \psi y))$
(12): z (11), *4.01, *3.26	$\vdash \forall y\, ((\forall x\, \varphi x \land \forall x\, \psi x) \rightarrow (\varphi y \land \psi y))$
	$\rightarrow ((\forall x\, \varphi x \land \forall x\, \psi x) \rightarrow \forall y\, (\varphi y \land \psi y))$
(13): z (10) a (12), *9.12	$\vdash (\forall x\, \varphi x \land \forall x\, \psi x) \rightarrow \forall y\, (\varphi y \land \psi y)$
(14): z (8) a (13), *3.2, *4.01	$\vdash \forall x\, (\varphi x \land \psi x) \leftrightarrow (\forall x\, \varphi x \land \forall x\, \psi x)$

Takový důkaz budeme zkracovat:

(1): *10.1	$\vdash \forall x\, (\varphi x \land \psi x) \rightarrow (\varphi y \land \psi y)$
(2): *3.26	$\vdash \ldots \rightarrow \varphi y$
(3): z (2), *9.13, *10.21	$\vdash \forall x\, (\varphi x \land \psi x) \rightarrow \forall y\, \varphi y$
(4): analogicky, *3.27	$\vdash \forall x\, (\varphi x \land \psi x) \rightarrow \forall y\, \psi y$
(5): z (3) a (4), *3.43	$\vdash \forall x\, (\varphi x \land \psi x) \rightarrow (\forall y\, \varphi y \land \forall y\, \psi y)$
(6): *10.14	$\vdash (\forall x\, \varphi x \land \forall x\, \psi x) \rightarrow (\varphi y \land \psi y)$
(7): z (6), *9.13, *10.21	$\vdash (\forall x\, \varphi x \land \forall x\, \psi x) \rightarrow \forall y\, (\varphi y \land \psi y)$
(8): z (5) a (7), *3.2, *4.01	$\vdash \forall x\, (\varphi x \land \psi x) \leftrightarrow (\forall x\, \varphi x \land \forall x\, \psi x)$

*10.24 $\vdash \varphi y \rightarrow \exists x\, \varphi x$

Důkaz:

(1): *10.1	$\vdash \forall x \sim\varphi x \rightarrow \sim\varphi y$
(2): z (1), *2.03, *10.01	$\vdash \varphi y \rightarrow \exists x\, \varphi x$

*10.25 $\vdash \forall x\, \varphi x \rightarrow \exists x\, \varphi x$

Důkaz:

(1): *10.1 $\vdash \forall x\, \varphi x \to \varphi y$

(2): *10.24 $\vdash \ldots \to \exists x\, \varphi x$

*10.251 $\vdash \forall x \sim\varphi x \to \sim\forall x\, \varphi x$

Důkaz:

(1): *10.25, *10.01 $\vdash \forall x\, \varphi x \to \sim\forall x \sim\varphi x$

(2): z (1), *2.03 $\vdash \forall x \sim\varphi x \to \sim\forall x\, \varphi x$

*10.252 $\vdash \sim\exists x\, \varphi x \leftrightarrow \forall x \sim\varphi x$

Důkaz:

(1): *2.08, *10.01 $\vdash \sim\exists x\, \varphi x \to \sim\sim\forall x \sim\varphi x$

(2): *2.14 $\vdash \ldots \to \forall x \sim\varphi x$

(3): *2.08, *10.01 $\vdash \exists x\, \varphi x \to \sim\forall x \sim\varphi x$

(4): (3), *2.03 $\vdash \forall x \sim\varphi x \to \sim \exists x\, \varphi x$

(5): (2), (4), *3.2, *4.01 $\vdash \sim\exists x\, \varphi x \to \forall x \sim\varphi x$

nebo:

(1): *4.13 $\vdash \forall x \sim\varphi x \leftrightarrow \sim\sim \forall x \sim\varphi x$

(2): z (1), *4.21 $\vdash \sim\sim\forall x \sim\varphi x \leftrightarrow \forall x \sim\varphi x$

(3): z (2), *10.01 $\vdash \sim\exists x\, \varphi x \leftrightarrow \forall x \sim\varphi x$

*10.253 $\vdash \sim\forall x\, \varphi x \leftrightarrow \exists x \sim\varphi x$

Důkaz:

(1): *10.1 $\vdash \forall x\, \varphi x \to \varphi y$

(2): *2.12 $\vdash \ldots \to \sim\sim\varphi y$

(3): z (2), *9.13, *10.21 $\vdash \forall x\, \varphi x \to \forall y \sim\sim\varphi y$

(4): z (3), *2.16 $\vdash \sim\forall x \sim\sim\varphi x \to \sim\forall x\, \varphi x$

(5): z (4), *10.01 $\vdash \exists x \sim\varphi x \to \sim\forall x\, \varphi x$

(6): *10.1 $\vdash \forall x \sim\sim\varphi x \to \sim\sim\varphi y$

(7): analogicky, *2.14 $\vdash \sim\forall x\, \varphi x \to \exists x \sim\varphi x$

(8): z (5) a (7), *3.2, *4.01 $\vdash \sim\forall x\, \varphi x \leftrightarrow \exists x \sim\varphi x$

*10.26 $\vdash (\forall x\, (\varphi x \to \psi x) \wedge \varphi y) \to \psi y$

Důkaz:

(1): *10.1 $\vdash \forall x\, (\varphi x \to \psi x) \to (\varphi y \to \psi y)$

(2): z (1), *3.31	$\vdash (\forall x\,(\varphi x \rightarrow \psi x) \land \varphi y) \rightarrow \psi y$

*10.27 $\vdash \forall x\,(\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow (\forall x\,\varphi x \rightarrow \forall x\,\psi x)$

Důkaz:

(1): *10.14	$\vdash (\forall x\,(\varphi x \rightarrow \psi x) \land \forall x\,\varphi x) \rightarrow ((\varphi y \rightarrow \psi y) \land \varphi y)$
(2): *3.35	$\vdash \ldots \rightarrow \psi y$
(3): z (2), *9.13, *10.21	$\vdash (\forall x\,(\varphi x \rightarrow \psi x) \land \forall x\,\varphi x) \rightarrow \forall y\,\psi y$
(4): z (3), *3.3	$\vdash \forall x\,(\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow (\forall x\,\varphi x \rightarrow \forall x\,\psi x)$

*10.271 $\vdash \forall x\,(\varphi x \leftrightarrow \psi x) \rightarrow (\forall x\,\varphi x \leftrightarrow \forall x\,\psi x)$

Důkaz:

(1): *2.08, *4.01	$\vdash \forall x\,(\varphi x \leftrightarrow \psi x) \rightarrow \forall x\,((\varphi x \rightarrow \psi x) \land (\psi x \rightarrow \varphi x))$
(2): *10.22	$\vdash \ldots \rightarrow (\forall x\,(\varphi x \rightarrow \psi x) \land \forall x\,(\psi x \rightarrow \varphi x))$
(3): *3.26	$\vdash \ldots \rightarrow \forall x\,(\varphi x \rightarrow \psi x)$
(4): *10.27	$\vdash \ldots \rightarrow (\forall x\,\varphi x \rightarrow \forall x\,\psi x)$
(5): analogicky, *3.27	$\vdash \forall x\,(\varphi x \leftrightarrow \psi x) \rightarrow (\forall x\,\psi x \rightarrow \forall x\,\varphi x)$
(6): z (4), (5), *3.43, *4.01	$\vdash \forall x\,(\varphi x \leftrightarrow \psi x) \rightarrow (\forall x\,\varphi x \leftrightarrow \forall x\,\psi x)$

*10.28 $\vdash \forall x\,(\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow (\exists x\,\varphi x \rightarrow \exists x\,\psi x)$

Důkaz:

(1): *10.1	$\vdash \forall x\,(\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow (\varphi y \rightarrow \psi y)$
(2): *2.16	$\vdash \ldots \rightarrow (\sim\psi y \rightarrow \sim\varphi y)$
(3): (2), *9.13, *10.21	$\vdash \forall x\,(\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow \forall y\,(\sim\psi y \rightarrow \sim\varphi y)$
(4): *10.27	$\vdash \ldots \rightarrow (\forall x \sim\psi x \rightarrow \forall x \sim\varphi x)$
(5): *2.16, *10.01	$\vdash \ldots \rightarrow (\exists x\,\varphi x \rightarrow \exists x\,\psi x)$

*10.3 $\vdash (\forall x\,(\varphi x \rightarrow \psi x) \land \forall x\,(\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow \forall x\,(\varphi x \rightarrow \chi x)$

Důkaz:

(1): *10.22	$\vdash (\forall x\,(\varphi x \rightarrow \psi x) \land \forall x\,(\psi x \rightarrow \chi x))$
	$\leftrightarrow \forall x\,((\varphi x \rightarrow \psi x) \land (\psi x \rightarrow \chi x))$
(2): (1), *4.01, *3.26	$\vdash (\forall x\,(\varphi x \rightarrow \psi x) \land \forall x\,(\psi x \rightarrow \chi x))$
	$\rightarrow \forall x\,((\varphi x \rightarrow \psi x) \land (\psi x \rightarrow \chi x))$
(3): *3.33, *9.13	$\vdash \forall x\,(((\varphi x \rightarrow \psi x) \land (\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow (\varphi x \rightarrow \chi x))$
(4): (3), *10.27	$\vdash \forall x\,((\varphi x \rightarrow \psi x) \land (\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow \forall x\,(\varphi x \rightarrow \chi x)$
(5): (2), (4), *2.06	$\vdash (\forall x\,(\varphi x \rightarrow \psi x) \land \forall x\,(\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow \forall x\,(\varphi x \rightarrow \chi x)$

nebo:

(1): *10.14 $\vdash (\forall x\ (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x\ (\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow ((\varphi y \rightarrow \psi y) \wedge (\psi y \rightarrow \chi y))$

(2): *3.33 $\vdash \ldots \rightarrow (\varphi y \rightarrow \chi y)$

(3): z (2), *9.13, *10.21 $\vdash (\forall x\ (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x\ (\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow \forall x\ (\varphi x \rightarrow \chi x)$

*11.2 $\vdash \forall x\ \forall y\ \varphi xy \leftrightarrow \forall y\ \forall x\ \varphi xy$

Důkaz:

(1): *10.1 $\vdash \forall x\ \forall y\ \varphi xy \rightarrow \forall y\ \varphi zy$

(2): *10.1 $\vdash \ldots \rightarrow \varphi zw$

(3): z (2), *9.13, *10.21 $\vdash \forall x\ \forall y\ \varphi xy \rightarrow \forall z\ \varphi zw$

(4): z (3), *9.13, *10.21 $\vdash \forall x\ \forall y\ \varphi xy \rightarrow \forall w\ \forall z\ \varphi zw$

(5): analogicky $\vdash \forall y\ \forall x\ \varphi xy \rightarrow \forall z\ \forall w\ \varphi zw$

(6): z (4) a (5), *3.2, *4.01 $\vdash \forall x\ \forall y\ \varphi xy \leftrightarrow \forall y\ \forall x\ \varphi xy$

*11.26 $\vdash \exists x\ \forall y\ \varphi xy \rightarrow \forall y\ \exists x\ \varphi xy$

Důkaz:

(1): *10.1 $\vdash \forall y\ \varphi xy \rightarrow \varphi xz$

(2): z (1), *9.13 $\vdash \forall x\ (\forall y\ \varphi xy \rightarrow \varphi xz)$

(3): z (2), *10.28 $\vdash \exists x\ \forall y\ \varphi xy \rightarrow \exists x\ \varphi xz$

(4): z (3), *9.13, *10.21 $\vdash \exists x\ \forall y\ \varphi xy \rightarrow \forall y\ \exists x\ \varphi xy$

*11.51 $\vdash \exists x\ \forall y\ \varphi xy \leftrightarrow \sim\forall x\ \exists y \sim\varphi xy$

Důkaz:

(1): *10.253 $\vdash \sim\forall y\ \varphi xy \leftrightarrow \exists y \sim\varphi xy$ (1)

(2): z (1), *9.13 $\vdash \forall x\ (\sim\forall y\ \varphi xy \leftrightarrow \exists y \sim\varphi xy)$

(3): z (2), *10.271 $\vdash \forall x \sim\forall y\ \varphi xy \leftrightarrow \forall x\ \exists y \sim\varphi xy$

(4): z (3), *4.11, *10.01 $\vdash \exists x\ \forall y\ \varphi xy \leftrightarrow \sim\forall x\ \exists y \sim\varphi xy$

Atd.

Důkazy s *9.14

*10.14 $\vdash (\forall x\ \varphi x \wedge \forall x\ \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$

Důkaz:

(1): *10.1	$\vdash \forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y$
(2): *10.1 [$\varphi x \coloneqq \psi x$]	$\vdash \forall x\, \psi x \rightarrow \psi y$
(3):	výrazy φy a ψy jsou smysluplné tak, že obsahují proměnnou stejného typu
(4): z (3), *9.14	výrazy $\forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y$ a $\forall x\, \psi x \rightarrow \psi y$ obsahují příslušné proměnné stejného typu, a můžeme je brát jako jedny
(5): z (4), *9.14	výraz $(\forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y) \rightarrow ((\forall x\, \psi x \rightarrow \psi y) \rightarrow ((\forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x\, \psi x \rightarrow \psi y)))$ obsahuje příslušné proměnné stejného typu, a můžeme je brát jako jedny
(6): z (1), (2) a (5), *3.2	$\vdash (\forall x\, \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x\, \psi x \rightarrow \psi y)$
(7): z (6), *3.47	$\vdash (\forall x\, \varphi x \wedge \forall x\, \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$

kde (3) byl tichý předpoklad.

Atd.